Analytic Structureについて (Function Algebra)

AUTHOR(S):
鶴見, 和之; 神保, 敏弥

数理解析研究所講究録
143巻 1972年 92-106

Analytic structure について

東京電機大　　鶴見和之
東京教育大・理　　神保敏弥

§1. 序

A を単位元を持つ可換な Banach algebra とし，A の maximal ideal space を M_A，A の総ての元の Gelfand transform の algebra を $\hat{A}$ とするとき，$x \in M_A$ に対して，x の或る近傍 U と，$\mathbb{C}^n$ 内の開集合内の解析的集合 V と，V から U の中への連続写像 τ が存在し，任意の $f \in \hat{A}$ に対し $f \circ \tau$ が V 上で正則であるとき，x に於て analytic structure が存在するという。ただしここでは自明な場合 ($\dim V = 0$, $\tau(V) = \{x\}$) を除き，$0 \in V$, $\tau(0) = x$ と仮定する。

K を M_A の compact 集合とし，K の A-convex hull を $\mathrm{Hull}_A(K)$ とし，$\mathrm{Hull}_A(K) \setminus K \neq \phi$ のときには，$\mathrm{Hull}_A(K) \setminus K$ 内に analytic structure が存在するだろうと予想されたが，1963年に G. Stolzenberg は $K \subset \mathbb{C}^2$, $A = P(K)$ について反例を与えた。更に Gleason part 等に対しても analytic structure の存在が一般には保証されないという事を J. Garnett が示した。従ってどんな条件の下で analytic structureが存在するかを調べる事は興味深い問題である，その存在については以下の様な場合に考察される：

1). Aの maximal ideal が代数的に有限生成：Gleason，この一般化は Browder．

2). part と representing measure：Wermer，Hoffman，O'Neill，Lumer，Sidney．

3). $\mathbb{C}^n$ 内での smooth curve と polynomially convex set：Wermer，Björk，Alexander．

4). $\hat{A}$ から解析的集合上の正則函数の芽の層の茎への準同型：Clayton．

5). $f \in \hat{A}$ を固定し原像 $f^{-1}(z)$ が有限個の点の時に注目したもの：Bishop，Björk，Wermer．

6). point derivation space；Grownover，これは 1), 2) と密接に結びついている．

逆に analytic structure が存在する場合には興味ある函数論的性質が導かれる．

§2. Analytic structure

A：単位元を持つ可換な Banach algebra．

M_A：Aの maximal ideal space で weak-* topology をもつとする．

$\hat{A}$：Aの総ての元の Gelfand transform の algebra．

<u>定義</u>： $x \in M_A$ に於て，analytic structure が存在するとは

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ analytic variety V in some open subset of $\mathbb{C}^n$，$\exists$ continuous mapping $\tau : V \xrightarrow{\text{into}} M_A$ such that $\forall f \in \hat{A}$ に対して，$f \circ \tau$ が V 上で正則である．ただし $\dim V \neq 0$，$\tau(V) \neq \{x\}$ であり，$0 \in V$，$\tau(0) = x$ とする．

最近 D. Clayton [9] は $\hat{A}$ から或る analytic variety 上の正則函数の germ の algebra への nontrivial homomorphism が存在するとき，analytic structure が存在することを多変数函数論の基本性質と inverse limit の概念を用いて証明した．更に A を locally-A function の germ の algebra にしてもよい事を示した．以下この定理と証明を記す．

<u>定理 2.1.</u>： W：$\mathbb{C}^n$ 内の或る open set 内の subvariety，$0 \in W$．

$H_0(W)$：0 の近傍で正則な函数を W 上に制限して得られる germ の algebra．

$h : \hat{A} \longrightarrow H_0(W)$ の nontrivial homomorphism．

$\Longrightarrow$ 次の条件を満す W 内の 0 の或る近傍 W' から M_A の中への continuous mapping τ が存在する：

(a) $\hat{f} \circ \tau$ は holomorphic on W'，(b) $h(\hat{f}) = \gamma_0(\hat{f} \circ \tau)$，for $\forall f \in A$，ここで $\gamma_0(\hat{f} \circ \tau)$ は $\hat{f} \circ \tau$ の $H_0(W')$ 内の germ．

<u>証明</u>．(1) $\mathfrak{A}$ を次の条件を満す $\hat{A}$ の異る有限個の元よりなる組 $(f_1, \cdots, f_n)$ の全体とする，即ち，e を $H_0(W)$ 上の evaluation

mapping とし, homomorphism $e\circ h$ によって定まる点を p とすると, $f_j(p)=0$, $\|f_j\|<1$, $j=1,\cdots,n$.
$\alpha:=(f_1,\cdots,f_n)$, $\beta:=(g_1,\cdots g_m)$ に対し, α の元が β に含まれるとき, $\alpha<\beta$ と定義するすると $\mathfrak{A}$ は direct set となる. α は又 $\mathfrak{M}_A$ から $\mathbb{C}^n$ への写像ともみなすことが出来る。以下 $X:=\mathfrak{M}_A$ とおく. 下記の notation を用いる:

$X_\alpha:=\{\alpha(x):=(f_1(x),\cdots,f_n(x))\mid x\in X\}$.

$D_\alpha:=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n \mid |z_j|<1,\ j=1,\cdots,n\}$.

${}_n\mathcal{O}(D_\alpha)$: D_α で正則な総ての函数の algebra.

$V_\alpha:=\{z\in D_\alpha \mid F(z)=0 \text{ for } \forall F\in {}_n\mathcal{O}(D_\alpha) \text{ with } F\circ\alpha=0\}$.

$H(V_\alpha)$: V_α 上で正則な総ての函数の algebra.

(2) A' を以下の条件を満す $\hat{A}$ の dense subalgebra とする:
$\mathfrak{A}':=\{\alpha=(f_1,\cdots,f_n)\in\mathfrak{A}\mid f_j\in A',\ j=1,\cdots,n\}$ とするとき, $\alpha\in\mathfrak{A}'$, $f\in H(V_\alpha)$ ならば $f\circ\alpha\in A'$ である.

今 $\alpha<\beta$ ならば $\pi_{\alpha\beta}(X_\beta)=X_\alpha$, $\pi_{\alpha\beta}(V_\beta)\subset V_\alpha$, $\pi_{\alpha\beta}(\overline{V_\beta})\subset\overline{V_\alpha}$ であるから, 各 inverse limit $\varprojlim\{X_\alpha,\pi_{\alpha\beta},\mathfrak{A}'\}$, $\varprojlim\{V_\alpha,\pi_{\alpha\beta},\mathfrak{A}'\}$, $\varprojlim\{\overline{V_\alpha},\pi_{\alpha\beta},\mathfrak{A}'\}=:X'$ は自然に X と homeomorphic となる. このとき, i を $X\longrightarrow X'$ を自然な写像とし, $\pi_\alpha: X'\longrightarrow\overline{V_\alpha}$ を自然な projection とする. 今

$A(V_\alpha)$: $\overline{V_\alpha}$ 上で連続で, V_α で正則な総ての函数の algebra.
$A(X'):=\{f\circ\pi_\alpha\in C(X')\mid \alpha\in\mathfrak{A}',\ f\in A(V_\alpha)\}$. とおくと, i の

adjoint mapping $i^*: A(X') \longrightarrow A'$ は isomorphism となり，i は位相同形となる。

(3) 一方 $\forall\alpha\in\mathfrak{A}$ に対して，$h_\alpha := h\circ\alpha^*$ とすると，$\forall f\in H(V_\alpha)$ に対して $h_\alpha(f)=\gamma_0(\varphi_\alpha^* f)$ を満す正則写像 $\varphi_\alpha:=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
H(V_\alpha) \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dddr, "\alpha^*"'] & & H_0(W) \\
V_\alpha & {}^{\exists}W_j\subset W \arrow[l, "{}^{\exists}\varphi_\alpha"'] & \\
& X \arrow[ul, "\alpha"] & \\
& \hat{A} \arrow[uuur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

ここで $\{W_j\}$ は次の条件を満す 0 の近傍基とする： $W_j \supseteq W_{j+1}$,

$f\in H(W_j)$, $f=0$ on some $W_k \Rightarrow f=0$ on W_j

(4) 次に $\mathfrak{A}_j := \{\alpha\in\mathfrak{A} \mid W_j$ に対して上記の写像 φ_α が存在するもの$\}$ とおく。この $\mathfrak{A}_j$ に対して前と同様に inverse limit を考える。$X_j := \varprojlim\{\overline{V}_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, \mathfrak{A}_j\}$，$p_{j\alpha}: X_j \longrightarrow \overline{V}_\alpha$ を自然な projection，$A(X_j) := \{p_{\alpha j}^* f \mid f\in A(V_\alpha), \alpha\in\mathfrak{A}_j\}$ とすると，$\forall j$ に対して $p_{j\alpha}\circ\gamma_j=\alpha$, for $\forall\alpha\in\mathfrak{A}_j$，である様な一意の連続写像 γ_j が存在し，更に，連続写像 $\varphi_j: W_j \longrightarrow X_j$ がとれ $p_{j\alpha}\circ\varphi_j=\varphi_\alpha$ を満すものが唯1つ存在する。

$$
\begin{tikzcd}
& X_j \arrow[dd, "p_{j\alpha}"] & \\
X \arrow[ur, "{}^{\exists}\gamma_j"] \arrow[dr, "\alpha"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & & W_j \arrow[ul, "{}^{\exists}\varphi_j"'] \arrow[dl, "\varphi_\alpha"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& \overline{V}_\alpha &
\end{tikzcd}
$$

(5) 次に $j \leq k$ に対して, 左下図が可換となる一意の写像が存在する.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\gamma_k"'] \arrow[dr, "\gamma_j"] & \\ X_k \arrow[rr, "\exists g_{jk}"] & & X_j \\ & W_k \subset W_j \arrow[ul, "\varphi_k"] \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \hat{A} & \\ A(X_k) \arrow[ur, "\gamma_k^*"] & & A(X_j) \arrow[ul, "\gamma_j^*"'] \arrow[ll, "g_{jk}^*"] \end{tikzcd}$$

閉グラフ定理と, $\hat{A} \subseteq \gamma_j^*(\overline{A(X_j)})$ より, 或る j に対して $\hat{A} \subseteq \gamma_j^*(\overline{A(X_j)})$ となり, この $\gamma_j^*(A(X_j))$ を前の A' とすれば, γ_j も g_{jk} $(k \geq j)$ も共に位相同形となる. 従って $\tau := \gamma_j^{-1} \circ \varphi_j$ とおけば条件を満す写像 τ が得られる.

<u>定理 2.2.</u> : S_φ : locally-A function の φ での総ての germ の algebra, $h_\varphi : S_\varphi \xrightarrow{\text{into}} H_0(W)$: nontrivial homomorphism

$\Rightarrow$ $\exists$ continuous mapping $\tau : \{0$ の或る近傍 $V\ (\subset W)\} \xrightarrow{\text{into}} X$,

such that a), $\tau(0) = \varphi$, b) $\hat{f} \circ \tau$: holomorphic on V,

c) $h_\varphi \gamma_\varphi(\hat{f}) = \gamma_0(\hat{f} \circ \tau)$ for $\forall\, \gamma_\varphi(\hat{f}) \in S_\varphi$.

<u>証明</u>. $h := h_\varphi \circ \gamma_\varphi$ とおき定理 2.1 を用いればよい.

§ 3. Point derivation と analytic structure.

$\mathcal{D}(A, \varphi)$: $\varphi \in \mathfrak{M}_A$ での総ての point derivation の線形空間.

$\mathcal{D}_c(A, \varphi)$: $\varphi \in \mathfrak{M}_A$ での総ての連続な point derivation の線形空間.

このとき, point derivation の空間と maximal ideal $\ker \varphi$ との間には

次の関係がある，即ち，$\mathcal{D}(A,\varphi)$ は $(\ker\varphi/(\ker\varphi)^2)^*$ に同形であり，$\mathcal{D}_c(A,\varphi)$ は $(\ker\varphi/\overline{(\ker\varphi)^2})^*$ と同形である．故に $\mathcal{D}(A,\varphi)$ の次元は $\ker\varphi$ 内の $(\ker\varphi)^2$ の余次元である．

$\dim\mathcal{D}(A,\varphi)=1$ のとき，R. M. Crownover [11] は φ を含む analytic disk が存在するため十分条件を与えた．

<u>補題 3.1.</u> $\dim\mathcal{D}(A,\varphi)=1$ のときは次の条件を満す φ のノルム近傍 $\mho$ が存在する：

a) $f\in(\ker\varphi)\setminus(\ker\varphi)^2$, $\|f\|\le 1$. $\Rightarrow$ $\exists$ 定数 $K_1, K_2>0$ such that $K_1\|\varphi_1-\varphi_2\|\le|\varphi_1(f)-\varphi_2(f)|\le K_2\|\varphi_1-\varphi_2\|$ for $\forall\varphi_1,\varphi_2\in\mho$.

b) $D_\psi\in\mathcal{D}_c(A,\psi)$, $\psi\in\mho$, $D_\psi\ne 0\Rightarrow D_\psi(f)\ne 0$, $\ker\psi=\mathbb{C}(f-\psi(f))+\overline{(\ker\psi)^2}$

<u>定理 3.1.</u> $\dim\mathcal{D}(A,\varphi)=1$, $\mho$：上述の近傍

$\mho_r:=\{\psi\in\mathcal{M}_A \mid \|\psi-\varphi\|\le r\}$, 或る $r>0$ に対して $\mho_r\subset\mho$ で $\varphi\notin\partial(\overline{A|\mho_r})$. ここで ∂B は B の Šilov 境界．

$\Rightarrow$ φ を含む analytic disk が存在する（即ち，V を単位開円板，τ を 1−1連続写像（ノルム位相で）とする analytic structure が存在する）．

<u>証明.</u> まず $\mathcal{M}_{(\overline{A|\mho_r})}=\mho_r$ である．補題 3.1. により，$\delta:=\inf\{|\hat f(\psi)| \mid \psi\in\partial(A|\mho_r)\}>0$ であるので $\hat f(\mho_r)$ は，円板 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<\delta\}=:D_\delta$ を含む．今 $V:=(\hat f|\mho_r)^{-1}(D_\delta)$, $\tau:=(f|V)^{-1}$, $\mathfrak{A}:=\{\hat g\circ\tau \mid g\in A\}$ とすると，$\mathfrak{A}$ は maximum modulus algebra

且つ，$\mathfrak{z}\in\mathfrak{O}$ であるので，$\mathfrak{O}$ の任意の函数が D_δ の内部で正則となる。

maximal ideal が代数的に有限生成のときには，良く知られている A. M. Gleason の次の結果〔12〕がある。

定理 3.2： $\ker\varphi$ が代数的に有限生成であるときは，φ に於て analytic structure が存在する。ただし τ は位相同形であり，$\tau(V)$ は φ の weak-* 近傍である。

この定理の仮定より $(\ker\varphi)^2$ は $\ker\varphi$ の中で有限余次元を持つことになるが，A. Browder〔7〕はこれを更に一般化した。

定理 3.3： $B:=\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k g_k h_k \mid g_k, h_k\in\ker\varphi, \|g_k\|\le 1, \|h_k\|\le 1, \sum|\mu_k|<\infty\}$ とし，B の $\ker\varphi$ 内での余次元を有限の n とする。
$\Rightarrow$ φ には次の様な analytic structure が存在する；τ は位相同形で，$\tau(V)$ は φ のノルム近傍である。

証明．仮定により $\forall f\in\ker\varphi$ に対して，$f_1,\cdots,f_n\in\ker\varphi$ が存在して，$f=\sum\lambda_j f_j+g$, $g\in B$ と表せる。ただし $\|f_j\|\le 1$ とする。Baire の category theorem を用いて，$f=\sum^{n}\lambda_j f_j+\sum^{\infty}\mu_k g_k h_k$, $\sum|\lambda_j|+\sum|\mu_k|\le C$，なる定数 C が存在することがわかり，更に $\|f\|\le 1$ なる $f\in\ker\varphi$ は或る $\varepsilon>0$ に対して $f=\sum^{r}a_{\nu_1\cdots\nu_n}f_1^{\nu_1}\cdots f_n^{\nu_n}+\tilde{f}$, $|\psi(\tilde{f})|\le(2C)^{-r-1}$, $\psi\in\{\|\psi-\varphi\|\le\varepsilon\}$ と表わせることにより，$\hat{f}\circ\tau$ の正則性が言える。もう少し言うと，σ を十分小にとり，$U:=\{\psi\in M_A \mid \|\psi-\varphi\|\le\varepsilon, |\hat{f}_j(\psi)|<\sigma\}$, $\tau:=((\hat{f}_1,\cdots,\hat{f}_n)|U)^{-1}$,

$V := \{(\hat{f}_1(\psi), \cdots, \hat{f}_n(\psi)) \mid \psi \in U\}$ とすれば求める結果を得る.

§4. holomorphic convexity と analytic structure

この節では analytic structure は, τ が位相同形であるとする。function algebra (A) on X に対して, 次の notation を用いる.

$\hat{A}$ をただ単に A とかき, $\forall$ 閉集合 $K \subset M_A$ に対して,

$\mathrm{Hull}_A(K) := \{x \in M_A \mid |f(x)| \leq \|f\|_K \text{ for}^\forall f \in A\}$.

$A(K)$: $A|K$ (A の K への制限) により生成された K 上の function algebra.

この時, M_A の閉集合と, Šilov 境界について次の事が成り立つ.

<u>定理 4.1.</u> : A : function algebra on X, $\Delta := M_A \setminus \partial A \ (\neq \phi)$.
$A_1 := A(\mathrm{Hull}_A(b\Delta))$ ここで $b\Delta$ は Δ の位相境界.
閉集合 $W \subset M_A$ は, A が $^\forall x \in W$ で analytic structure を持つとする.
$\Rightarrow \partial A_1 \subset (b\Delta \setminus W)$.

次に A を function algebra on X, $W \subset M_A$ を局所閉集合とする.

$H_A(W)$: 次の様な $f \in C(W)$ の集合とする. 即ち, $^\forall x \in W$ に対して, x の開近傍 $U \subset M_A$ が存在し, 次の事を満す列 $\{g_n\} \in A$ がとれる, 即ち $\lim_{n \to \infty} \|f - g_n\|_{W \cap U} = 0$

<u>定義.</u> V を W の局所閉部分集合とするとき,
V が <u>A_W-analytic variety</u> であるとは
$\Leftrightarrow$ $^\forall x \in V$ に対して, x の開近傍 $U (\subset W)$ がとれ, 次の2条件を

満す函数族 $\{f_i\}_{i\in I} \subset C(U)$ がとれる.即ち:

① $U \cap V = \{x \in U \mid f_i(x) = 0 \text{ for } {}^\forall i \in I\}$. ② $f_i|_{U\setminus V} \in H_A(U \setminus V)$.

次に,開集合 $U \subset M_A$, bU の局所閉集合 V に対して.

V が <u>U-analytic variety</u> at bU であるとは

$\Leftrightarrow$ $U \cup V$ が局所閉集合で, V が $A_{U\cup V}$-analytic variety である.

この analytic variety に対して,次の事実が成り立つ.

<u>定理 4.2.</u>: A を function algebra on X とし, $U \subset M_A \setminus \partial A$ を開集合とするとき, ${}^\forall x \in bU$ に対して, x の開近傍 W がとれ, W が $A_{U\cup W}$-analytic variety

$\Rightarrow$ $U \subset Hull_A(bU \setminus W)$

<u>系.</u> A を function algebra on X とし, $\Delta := M_A \setminus X \,(\neq \phi)$, V: $b\Delta$ の相対開集合, V: Δ-analytic variety

$\Rightarrow$ $\Delta \subset Hull_A(b\Delta \setminus V)$.

<u>定理 4.3.</u> A を function algebra on X とし, B を function algebra on M_A such that $A \subset B$ とする. V: closed B_{M_A}-analytic variety in M_A.
更に, $B|_{(M_A\setminus V)}$ は uniform dense subalgebra of functions from $H_A(M_A \setminus V)$ を含む.

$\Rightarrow$ $V = Hull_A(V)$.

<u>系.</u> A を function algebra on X とし, $\Delta := M_A \setminus X \;(\neq \phi)$ とする. $W \subset X$ を開集合, $K \subset W$ を compact 集合とし $Hull_A(K) \cap W = K$ とする. 更に $b\Delta \cap W$ が Δ-analytic variety とする

$\Rightarrow \quad K = \mathrm{Hull}_A(K) = \mathcal{M}_{A(K)}$.

これらの系より次の定理が導かれる.

定理4.4.: X を reduced analytic space とし, $\mathcal{O}(X)$ を X 上の正則函数の algebra とするとき, A を X の点を分離する $\mathcal{O}(X)$ の subalgebra とする. 今 K を compact $\mathcal{O}(X)$-convex set in X such that $\hat{K}_A := \{x \in X \mid |f(x)| \leq \|f\|_K \text{ for } {}^\forall f \in A\}$ が X の compact 集合.

$\Rightarrow \quad K = \hat{K}_A = \mathcal{M}_{A(K)}$

analytic variety について次の事実が成り立つ.

定理4.5.: A を function algebra on X とし, $\Delta := \mathcal{M}_A \setminus X \ (\neq \phi)$ とするとき, W を X の開集合とし A は W の各点で analytic structure を持つならば,

$\Rightarrow \quad b\Delta \cap W$: Δ-analytic variety

次に $\mathbb{C}^n$ の compact 集合上での function algebra についての analytic structure を考察する. これについて G. Stolzenberg [19] の定理がある.

定理4.6.: X : $\mathbb{C}^n$ の compact polynomially convex set.

K : $\mathbb{C}^n$ の有限個の滑らかな曲線の合併とする.

$\Rightarrow \quad (X \cup K)^\wedge \setminus (X \cup K)$ は $\mathbb{C}^n \setminus (X \cup K)$ の 1 次元 analytic set か又は空である. ここで $\hat{K}$ は K の polynomially convex hull である.

定理4.7.: $K_i \ (i = 1, \cdots, s)$ を $\mathbb{C}^n$ の arc で z_1 は各 K_i 上で局

所的に 1-1 とする．今 $K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ とすると，

$\Rightarrow$ $\hat{K} \setminus K$ は $\mathbb{C}^m \setminus K$ の 1 次元 analytic subset 又は空集合である．

特に単位円周上の function algebra について次の事実が成り立つ

定理4.8.：A は function algebra on $T := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする．今 A は局所的に 1-1 なる函数を含むとすると．

$\Rightarrow$ 次の何れかである

a). $M_A = T$ で $A = C(T)$．

b) $M_A \neq T$，$M_A \setminus T$ は 1 次元 analytic space の構造をもつ．この時は A の函数は $M_A \setminus T$ 上で正則函数である．

一般に $M_A \setminus X$ $(\neq \phi)$ には analytic structure は入らない．これは G. Stolzenberg が $\mathbb{C}^2$ の polynomially convex set に対し示し，更に J. Wermer は rationally convex set に対して示した．ここでは G. Stolzenberg の例の作り方を示す：

$\{p_i\}_{i=1,2,\cdots}$ を集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ の稠密な可算部分集合とし，$U := \{z := (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$，$K_i := \{z \in U \mid (z_1 - p_i)(z_2 - p_i) = 0\}$，とする．函数列 $\{F_i\}$ を次の様に帰納的に定める：

$$F_1(z) := p_1^{-2}(z_1 - p_1)(z_2 - p_1).$$

$$L_1 := \{z \in U \mid -\tfrac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\, F_1(z) \leq \tfrac{1}{2}\}.$$ とおく．

今，すでに $F_1, \cdots F_j$ が $F_j(0) = 1$，$F_j(K_j) = 0$ である様に作られたとし，$L_j := \{z \in U \mid -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\, F_j(z) \leq \frac{1}{2}\}$ とおく．

今 $$G_{j+1}(z) := p_{j+1}^{-2}\,(z_1 - p_{j+1})(z_2 - p_{j+1})$$
$$E_{j+1}(z) := \exp\,(F_j(z) - 1)$$
とおき, $\max\limits_{L_j \cup K_{j+1}} |\,(E_{j+1})^{N_j}\, G_{j+1}\,| < \frac{1}{4}$ となる様に正整数 N_j をとり,
$$F_{j+1} := (E_{j+1})^{N_j}\, G_{j+1}$$ とおく.

次にこの F_i によって定められた超平面 $\{\, z \in U \mid F_i(z) - 1 = 0 \,\}$ の原点を通る1つの連結成分を V_i とすれば, 列 $\{V_i\}$ は次の距離の意味で収束する部分列 $\{V_{i_k}\}$ を含む. その極限集合を V とする. ここで $\mathbb{C}^n$ の compact 集合に次の距離を入れる, 即ち compact 集合 S, T に対して,

$$\mathrm{distance}(S, T) := \max_{s \in S}\{\min_{t \in T} |s - t|\} + \max_{t \in T}\{\min_{s \in S} |t - s|\}.$$

とする. ここで $|s - t|$ は $\mathbb{C}^n$ のユークリッド距離.

今 $X := V \cap bU$ とおけば, $\hat{X} \setminus X \neq \phi$ で, polynomially convex hull $\hat{X}$ には analytic structure が入らない事が示される.

文　献

[1]. H. Alexander: Uniform algebras on curves, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 1269 — 1272.

[2] H. Alexander: Polynomial approximation and analytic structure, Duke Math. Jour. 38 (1971) 123 — 135.

[3] R. Arens: The problem of locally-A functions in a commutative

Banach algebra A, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 24 — 36.

[4] J-E. Björk : Analytic structures in the maximal ideal space of a uniform algebra, Arkiv för Math. 8 (1970) 239 — 244.

[5] J-E. Björk : Holomorphic convexity and analytic structures in Banach algebras, Arkiv för Math. 9 (1971) 39 — 54.

[6] A. Browder : Introduction to function algebras, W. A. Benjamin (1969).

[7] A. Browder : Point derivations and analytic structures in the spectrum of a Banach algebra, Jour. Functional Analysis 7 (1971) 156 — 164.

[8] D. Clayton : Local analytic structure in Banach algebras, Indiana Univ. Math. Jour. 20 (1970) 507 — 513.

[9] D. Clayton : A local characterization of analytic structure in a commutative Banach algebra, Lecture Notes in Math. 184 (1970).

[10] R. M. Crownover : Principle ideal which are maximal in a Banach algebras, Studia Math. 33 (1969) 299 — 304.

[11] R. M. Crownover : One-dimenseonal point derivation spaces in Banach algebras, Studia Math. 35 (1970). 249 — 259

[12] A. M. Gleason : Finitely generated ideals in Banach algebras, Jour. Math. Mech. 13 (1964) 125 — 132.

[13] R. Guning and H. Rossi : Analytic functions of several complex variables, Printice - Hall.

[14] H. Rossi : The local maximum modulus principle, Ann. Math. 72.

(1960) 1—11.

[15] W. Rudin : Analytic and maximum modulus principle, Duke Math. Jour. 20 (1953), 449—458.

[16] W. Rudin : Function theory in Polydiscs, W. A. Benjamin (1969).

[17] S. J. Sidney : Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968) 119—127.

[18] G. Stolzenberg : A hull with no analytic structure, Jour. Math. Mech. 12 (1963). 103—111.

[19] G. Stolzenberg : Uniform approximation on smooth curves, Acta Math. 115 (1966) 185—198.

[20] J. Wermer : On an example of Stolzenberg, Lecture Notes in Math. 184 (1970) 79—84.

[21] J. Wermer : Banach algebras and several complex variables, Markham Publ. Company. (1971).